Das vermeintlich unberechenbare Würfelspiel

//////////

KSFE 2022 in Wiesbaden

2022-09-15 / Matthias Lehrkamp / 1.0

Agenda

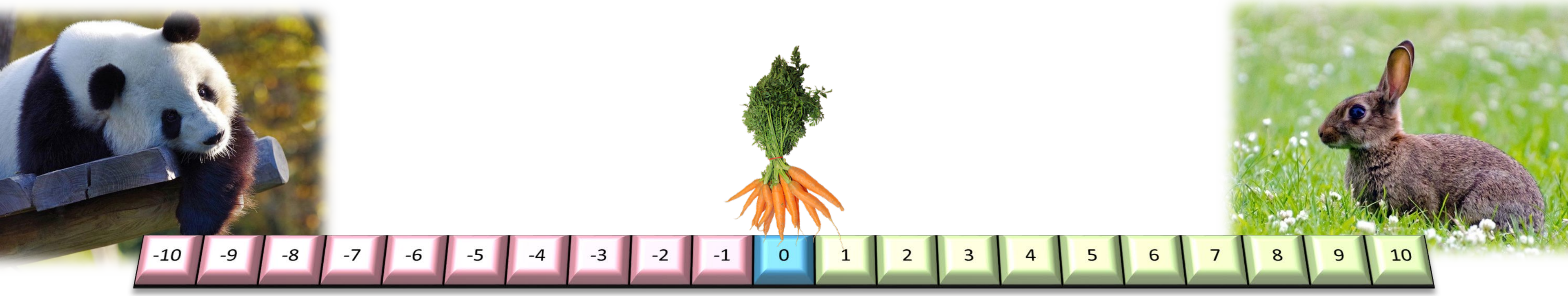
// Das Würfelspiel

// Die Monte-Carlo Simulation

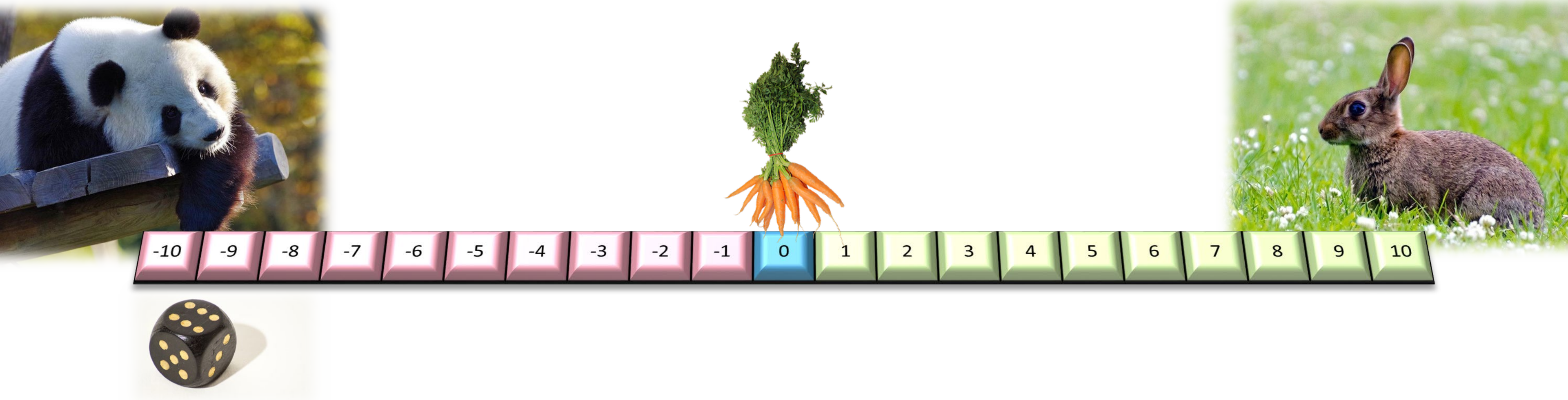
// Zusammenfassung

Das Würfelspiel

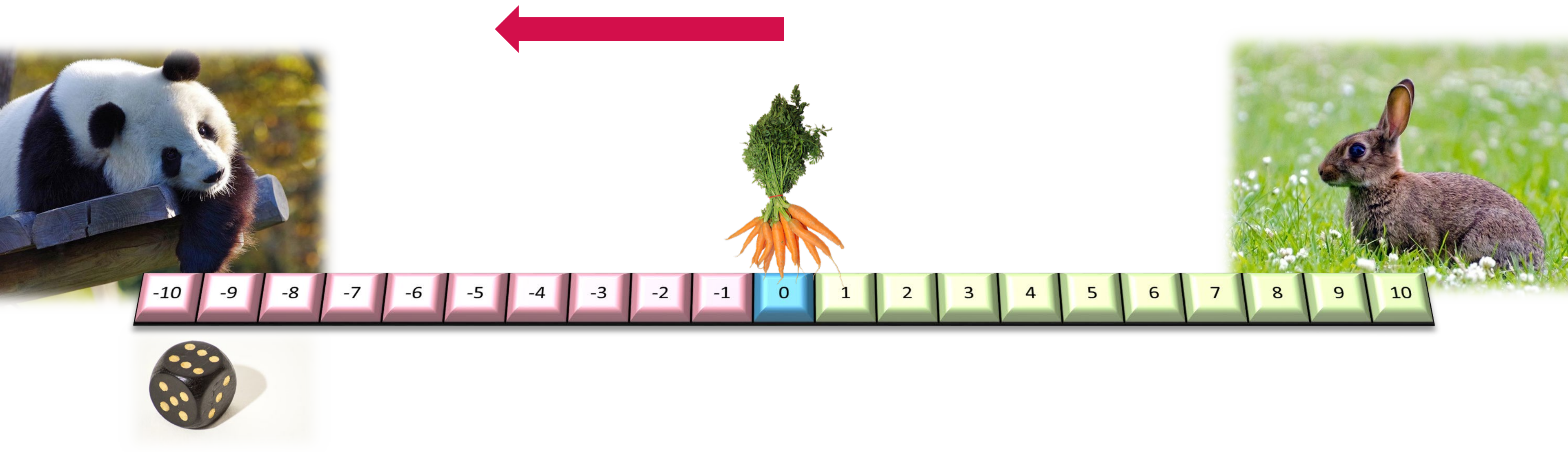
Das Würfelspiel 21 Felder



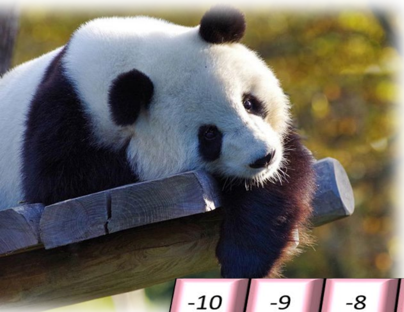
Das Würfelspiel 21 Felder



Das Würfelspiel 21 Felder



Das Würfelspiel 21 Felder

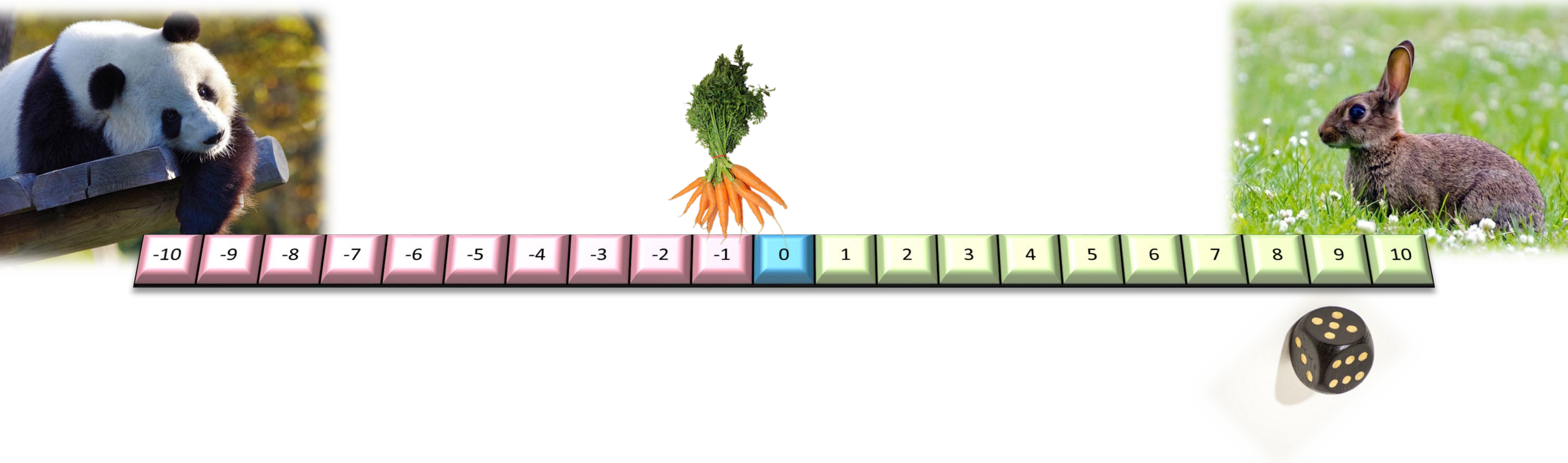


-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Das Würfelspiel 21 Felder

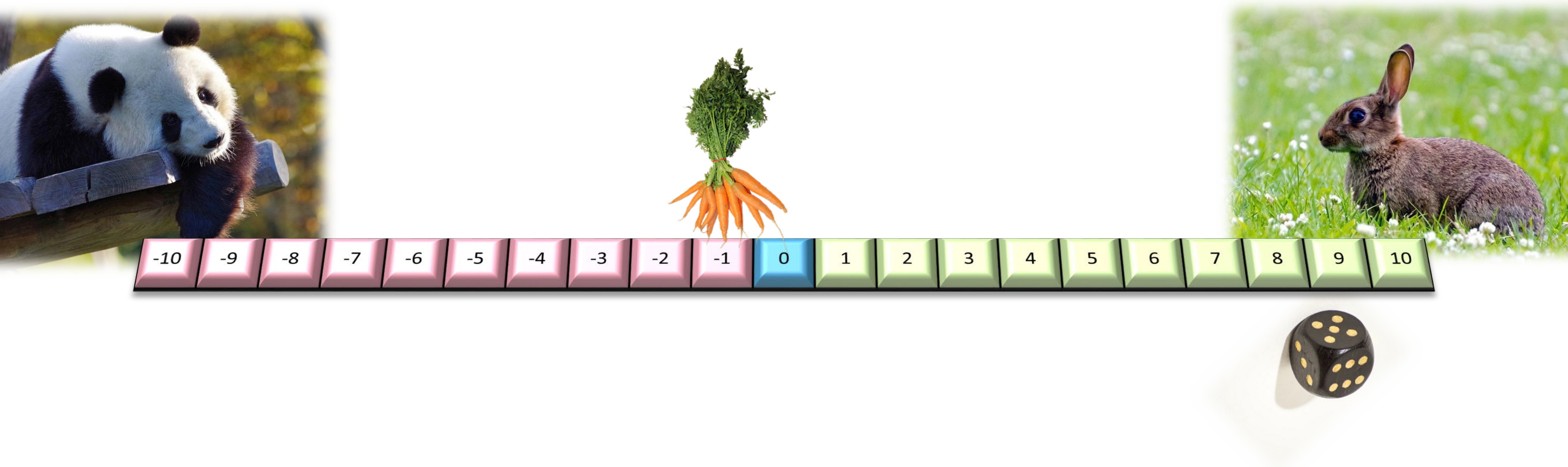
-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Das Würfelspiel 21 Felder



- Das Spiel endet sofern das 10te Feld auf einer Seite überschritten wird
- Beginner des nächsten Spiels ist der Verlierer des letzten Spiels

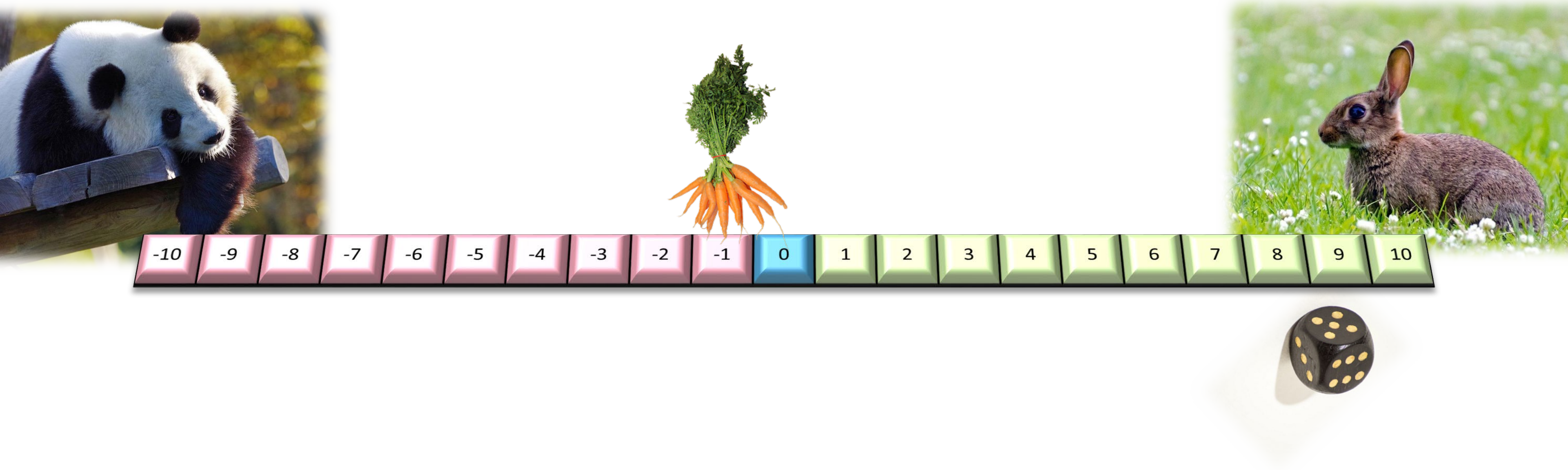
Das Würfelspiel 21 Felder



- Es gibt Möglichkeiten, in denen das Spiel unendlich gespielt wird

Wurf	Start	1	2	3	4	…
Spieler		Panda	Hase	Panda	Hase	…
Würfelaugen		3	3	3	3	…
Summe	0	-3	0	-3	0	…

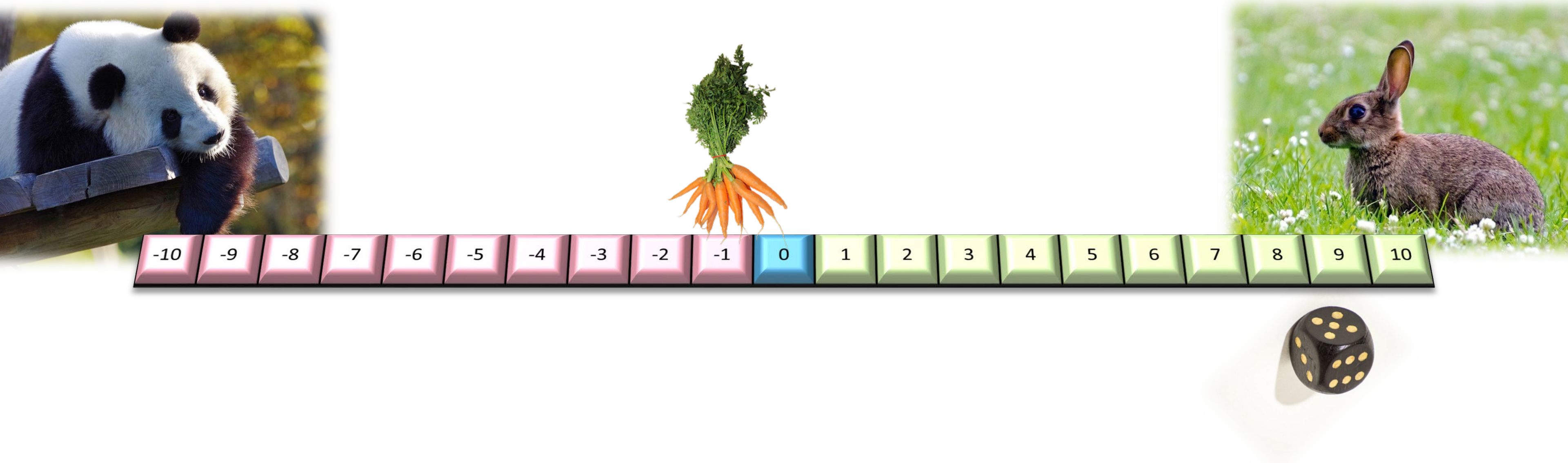
Das Würfelspiel 21 Felder



- Es gibt Möglichkeiten, in denen das Spiel unendlich gespielt wird
- Das schnellste Spiel ist nach 3 Würfen erreicht

Wurf	Start	1	2	3
Spieler		Panda	Hase	Panda
Würfelaugen		6	1	6
Summe	0	-6	-5	-11

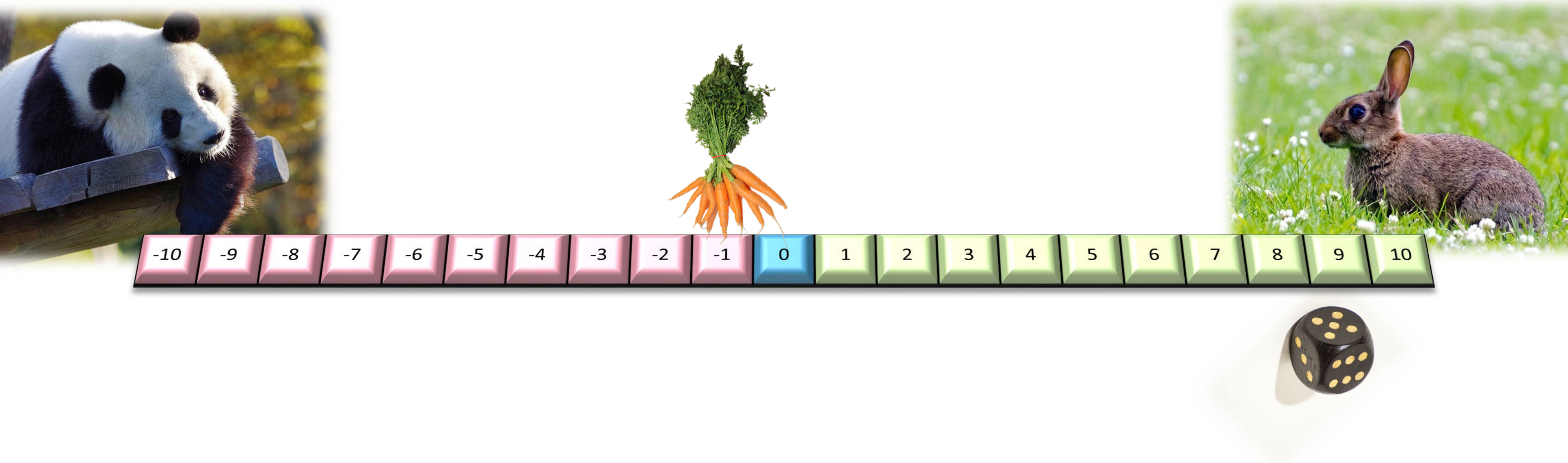
Das Würfelspiel 21 Felder



- Es gibt Möglichkeiten, in denen das Spiel unendlich gespielt wird
- Das schnellste Spiel ist nach 3 Würfen erreicht
- Das schnellste Spiel, wenn man nicht beginnt, dauert 6 Würfelwürfe

Wurf	Start	1	2	3	4	5	6
Spieler		Panda	Hase	Panda	Hase	Panda	Hase
Würfelaugen		1	6	1	6	1	6
Summe	0	-1	5	4	10	9	15

Das Würfelspiel 21 Felder

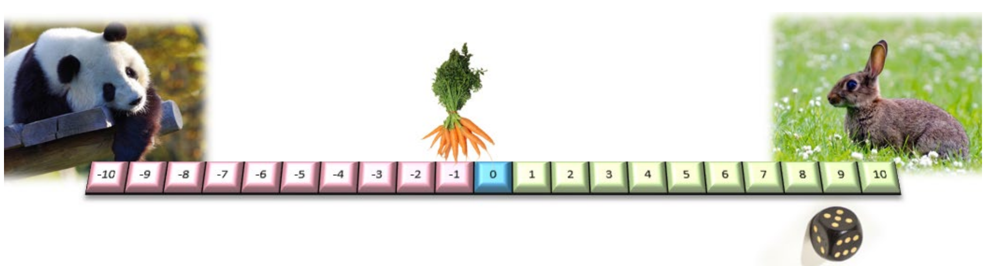


- Es gibt Möglichkeiten, in denen das Spiel unendlich gespielt wird
- Das schnellste Spiel ist nach 3 Würfen erreicht
- Das schnellste Spiel, wenn man nicht beginnt, dauert 6 Würfelwürfe

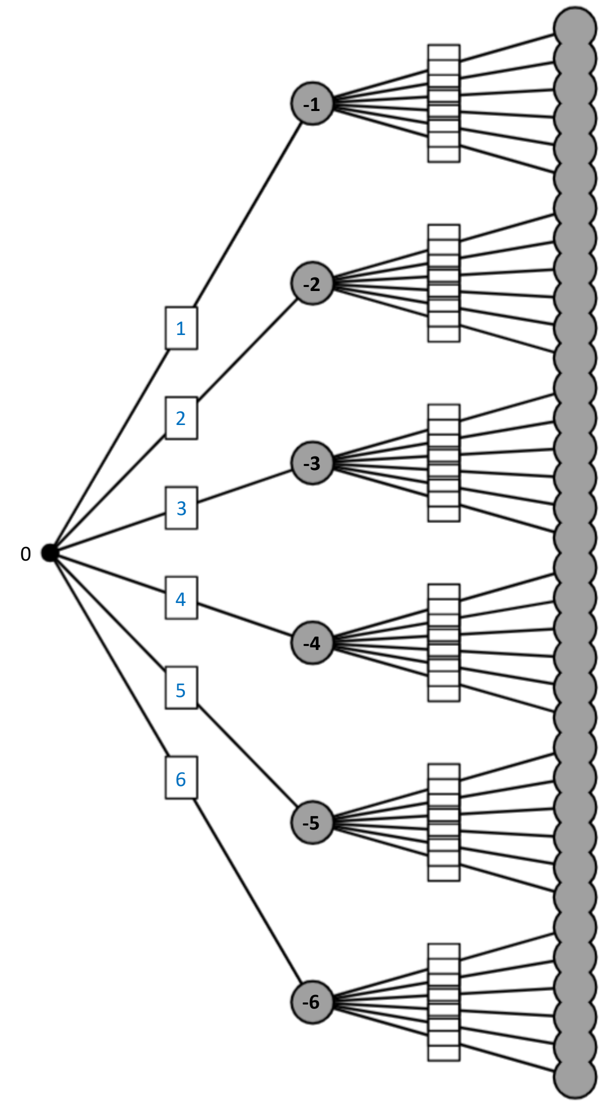
Wie lang ist die durchschnittliche Spieldauer?

Das Würfelspiel 21 Felder

Würfel-wurf	Anzahl Spielende/ Alle Möglichkeiten	Prozent Spielende <=Wurf x
1	0 / 6	0.00%
2	0 / 36	0.00%
3	1 / 216	0.46%
4	6 / 1296	0.46%
5	267 / 7776	3.43%
6	1812 / 46656	3.88%
7	21648 / 279936	7.73%
8	147913 / 1679616	8.81%
9	1282733 / 10077696	12.73%
10	8614932 / 60466176	14.25%
11	65135940 / 362797056	17.95%
12	429506753 / 2176782336	19.73%
13	3022124534 / 13060694016	23.14%



Entscheidungsbaum



Das Würfelspiel 21 Felder

Würfel-wurf	Anzahl Spielende/ Alle Möglichkeiten	Prozent Spielende <=Wurf x	Prozent Spielende =Wurf x	$x_i p_i$
1	0 / 6	0.00%	0%	0
2	0 / 36	0.00%	0%	0
3	1 / 216	0.46%	0.46%	0,0138
4	6 / 1296	0.46%	0%	0
5	267 / 7776	3.43%	2.97%	0,1485
6	1812 / 46656	3.88%	0.45%	0,0270
7	21648 / 279936	7.73%	3.85%	0,2695
8	147913 / 1679616	8.81%	1.08%	0,0864
9	1282733 / 10077696	12.73%	3.92%	0,3528
10	8614932 / 60466176	14.25%	1.52%	0,1520
11	65135940 / 362797056	17.95%	3.7%	0,4070
12	429506753 / 2176782336	19.73%	1.78%	0,2136
13	3022124534 / 13060694016	23.14%	3.41%	0,4433
				2,1139

$$E(X) = \sum_{i=1}^{N} x_i p_i$$

Problem: Die Möglichkeiten wachsen sehr schnell an und das Spiel kann unendlich gehen.

Nicht alle Wahrscheinlichkeiten können einbezogen werden.

Das Würfelspiel 21 Felder

Würfel-wurf	Anzahl Spielende/ Alle Möglichkeiten	Prozent Spielende <=Wurf x	Prozent Spielende =Wurf x	$x_i p_i$
1	0 / 6	0.00%	0%	0
2	0 / 36	0.00%	0%	0
3	1 / 216	0.46%	0.46%	0,0138
4	6 / 1296	0.46%	0%	0
5	267 / 7776	3.43%	2.97%	0,1485
6	1812 / 46656	3.88%	0.45%	0,0270
7	21648 / 279936	7.73%	3.85%	0,2695
8	147913 / 1679616	8.81%	1.08%	0,0864
9	1282733 / 10077696	12.73%	3.92%	0,3528
10	8614932 / 60466176	14.25%	1.52%	0,1520
11	65135940 / 362797056	17.95%	3.7%	0,4070
12	429506753 / 2176782336	19.73%	1.78%	0,2136
13	3022124534 / 13060694016	23.14%	3.41%	0,4433
				2,1139

$$E(X) = \sum_{i=1}^{N} x_i p_i$$

Lösung: Es werden zufällige Ereignisse simuliert, die den vorgegebenen Gewichten entsprechen.

$$\boxed{E(X) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} z_i}$$

Das Würfelspiel 21 Felder

Würfel-wurf x	Prozent Spielende	Prozent Spielende =Wurf x	$x_i p_i$
1	0.00%	0%	0
2	0.00%	0%	0
3	0.46%	0.46%	0,0138
4	0.46%	0%	0
5	3.43%	2.97%	0,1485
6	3.88%	0.45%	0,0270
7	7.73%	3.85%	0,2695
8	8.81%	1.08%	0,0864
9	12.73%	3.92%	0,3528
10	14.25%	1.52%	0,1520
11	17.95%	3.7%	0,4070
12	19.73%	1.78%	0,2136
13	23.14%	3.41%	0,4433
			2,1139

$$E(X) = \sum_{i=1}^{N} x_i p_i$$

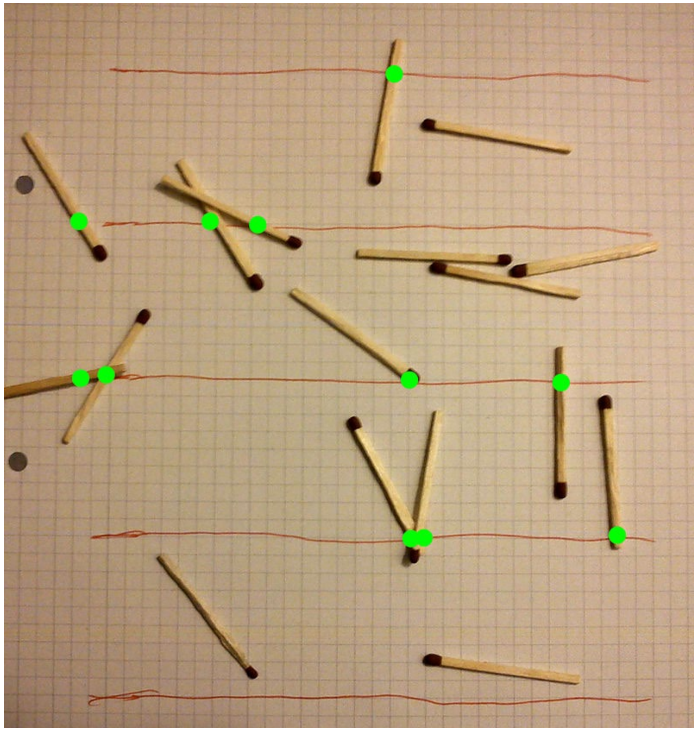
```
/* expected value by simulation */
DATA evalue;
    DO i=1 TO 500;
       z= 0;
       zz= ranuni(20220915);
       IF      zz<=0.0046 THEN z= 3;
       ELSE IF zz<=0.0343 THEN z= 5;
       ELSE IF zz<=0.0388 THEN z= 6;
       ELSE IF zz<=0.0773 THEN z= 7;
       ELSE IF zz<=0.0881 THEN z= 8;
       ELSE IF zz<=0.1273 THEN z= 9;
       ELSE IF zz<=0.1425 THEN z= 10;
       ELSE IF zz<=0.1795 THEN z= 11;
       ELSE IF zz<=0.1973 THEN z= 12;
       ELSE IF zz<=0.2314 THEN z= 13;
       OUTPUT;
    END;
RUN;
/* calculation of E(X)  */
PROC SQL;
    SELECT sum(z)/count(*) FROM evalue;
QUIT;
```

$$\boxed{E(X) \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} z_i = 2{,}116}$$

Die Monte-Carlo Simulation

Die Monte-Carlo Simulation

- Erste Anwendung war die annäherungsweise Bestimmung der Kreiszahl Pi (Nadelproblem)



Auf dem Bild rechts kreuzen 11 von 17 Stäbchen eine Linie; es ergibt sich also

$$\pi \approx \frac{2 \cdot 17}{11} \approx 3{,}1.$$

https://de.wikipedia.org/wiki/Buffonsches_Nadelproblem

Die Monte-Carlo Simulation

- Erste Anwendung war die annäherungsweise Bestimmung der Kreiszahl Pi (Nadelproblem)
- 2. Weltkrieg: Entwicklung der ersten Atombombe
  MC-Simulation zur Simulation der Neutronendiffusion in nuklearen Materialien
- Der Codename ist von der Spielbank Monte-Carlo in Monaco abgeleitet
- Untersuchung eines wiederholten Experiments, mit Hilfe von Zufallsstichproben
- Basiert auf die zentralen Grenzwertsätze aus der Wahrscheinlichkeitstheorie
  - Die Summe mehrerer unabhängiger Zufallsvariablen approximiert zu einer Normalverteilung
  - Zufallsvariablen sollen eine identische Verteilung besitzen und unabhängig zueinander sein

→Aufgrund der zentralen Grenzwertsätze sinkt mit steigender Anzahl der simulierten Spiele die Varianz des Erwartungswertes.

→Mit einer hinreichende Anzahl Simulationen nährt man sich den wahren Erwartungswert an.

https://de.wikipedia.org/wiki/Monte-Carlo-Simulation
https://de.wikipedia.org/wiki/Zentraler_Grenzwertsatz

Simulation eines Spiels

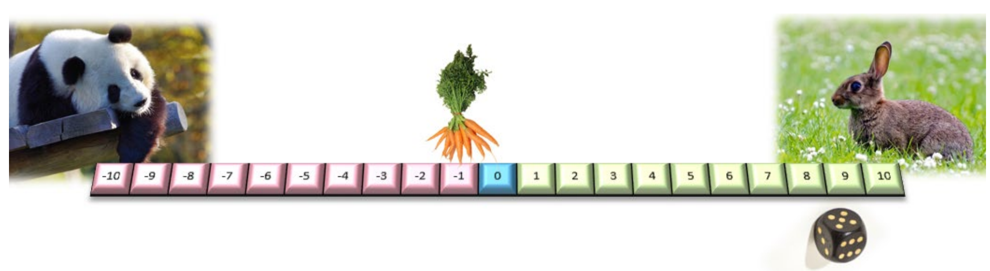
```
/* Simulation of one game */
DATA wspiel;
    CALL streaminit(20220915); /* Seed for random numbers */
    wurfnr= 0; /* Counting the number of dice rolls */
    spieler= 1; /* -1=left, 1=right player */
    feld= 0; /* Field number */
    DO WHILE ( abs(feld)<=10 );
        wurfnr= wurfnr + 1;
        spieler= spieler * -1; /* change player */
        wzahl= ceil( rand('uniform')*6 ); /* cube number */
        feld= feld + wzahl * spieler; /* new field number */
        OUTPUT;
    END;
RUN;
```

Simulation eines Spiels

```
/* Simulation of one game */
DATA wspiel;
    CALL streaminit(20220915); /* Seed for random numbers */
    wurfnr= 0; /* Counting the number of dice rolls */
    spieler= 1; /* -1=left, 1=right player */
    feld= 0; /* Field number */
    DO WHILE ( abs(feld)<=10 );
        wurfnr= wurfnr + 1;
        spieler= spieler * -1; /* change player */
        wzahl= ceil( rand('uniform')*6 ); /* cube number */
        feld= feld + wzahl * spieler; /* new field number */
        OUTPUT;
    END;
RUN;
```

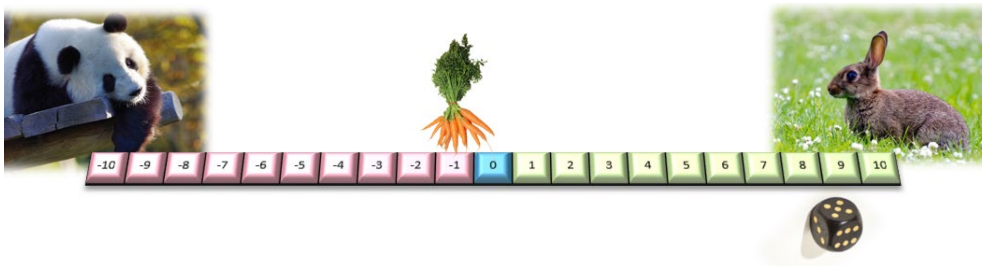
Simulation eines Spiels

```
/* Simulation of one game */
DATA wspiel;
    CALL streaminit(20220915); /* Seed for random numbers */
    wurfnr= 0; /* Counting the number of dice rolls */
    spieler= 1; /* -1=left, 1=right player */
    feld= 0; /* Field number */
    DO WHILE ( abs(feld)<=10 );
        wurfnr= wurfnr + 1;
        spieler= spieler * -1; /* change player */
        wzahl= ceil( rand('uniform')*6 ); /* cube number */
        feld= feld + wzahl * spieler; /* new field number */
        OUTPUT;
    END;
RUN;
```



Simulation eines Spiels

```
/* Simulation of one game */
DATA wspiel;
    CALL streaminit(20220915); /* Seed for random numbers */
    wurfnr= 0; /* Counting the number of dice rolls */
    spieler= 1; /* -1=left, 1=right player */
    feld= 0; /* Field number */
    DO WHILE ( abs(feld)<=10 );
        wurfnr= wurfnr + 1;
        spieler= spieler * -1; /* change player */
        wzahl= ceil( rand('uniform')*6 ); /* cube number */
        feld= feld + wzahl * spieler; /* new field number */
        OUTPUT;
    END;
RUN;
```



Simulation eines Spiels

```
/* Simulation of one game */
DATA wspiel;
    CALL streaminit(20220915); /* Seed for random numbers */
    wurfnr= 0; /* Counting the number of dice rolls */
    spieler= 1; /* -1=left, 1=right player */
    feld= 0; /* Field number */
    DO WHILE ( abs(feld)<=10 );
        wurfnr= wurfnr + 1;
        spieler= spieler * -1; /* change player */
        wzahl= ceil( rand('uniform')*6 ); /* cube number */
        feld= feld + wzahl * spieler; /* new field number */
        OUTPUT;
    END;
RUN;
```

Simulation eines Spiels

```
/* Simulation of one game */
DATA wspiel;
    CALL streaminit(20220915); /* Seed for random numbers */
    wurfnr= 0; /* Counting the number of dice rolls */
    spieler= 1; /* -1=left, 1=right player */
    feld= 0; /* Field number */
    DO WHILE ( abs(feld)<=10 );
        wurfnr= wurfnr + 1;
        spieler= spieler * -1; /* change player */
        wzahl= ceil( rand('uniform')*6 ); /* cube number */
        feld= feld + wzahl * spieler; /* new field number */
        OUTPUT;
    END;
RUN;
```

Simulation eines Spiels

```
/* Simulation of one game */
DATA wspiel;
    CALL streaminit(20220915); /* Seed for random numbers */
    wurfnr= 0; /* Counting the number of dice rolls */
    spieler= 1; /* -1=left, 1=right player */
    feld= 0; /* Field number */
    DO WHILE ( abs(feld)<=10 );
        wurfnr= wurfnr + 1;
        spieler= spieler * -1; /* change player */
        wzahl= ceil( rand('uniform')*6 ); /* cube number */
        feld= feld + wzahl * spieler; /* new field number */
        OUTPUT;
    END;
RUN;
```

Simulation eines Spiels

```
/* Simulation of one game */
DATA wspiel;
    CALL streaminit(20220915); /* Seed for random numbers */
    wurfnr= 0; /* Counting the number of dice rolls */
    spieler= 1; /* -1=left, 1=right player */
    feld= 0; /* Field number */
    DO WHILE ( abs(feld)<=10 );
        wurfnr= wurfnr + 1;
        spieler= spieler * -1; /* change player */
        wzahl= ceil( rand('uniform')*6 ); /* cube number */
        feld= feld + wzahl * spieler; /* new field number */
        OUTPUT;
    END;
RUN;
```

Simulation eines Spiels

```
/* Simulation of one game */
DATA wspiel;
    CALL streaminit(20220915); /* Seed for random numbers */
    wurfnr= 0; /* Counting the number of dice rolls */
    spieler= 1; /* -1=left, 1=right player */
    feld= 0; /* Field number */
    DO WHILE ( abs(feld)<=10 );
        wurfnr= wurfnr + 1;
        spieler= spieler * -1; /* change player */
        wzahl= ceil( rand('uniform')*6 ); /* cube number */
        feld= feld + wzahl * spieler; /* new field number */
        OUTPUT;
    END;
RUN;
```

Simulation eines Spiels

```
/* Simulation of one game */
DATA wspiel;
    CALL streaminit(20220915); /* Seed for random numbers */
    wurfnr= 0; /* Counting the number of dice rolls */
    spieler= 1; /* -1=left, 1=right player */
    feld= 0; /* Field number */
    DO WHILE ( abs(feld)<=10 );
        wurfnr= wurfnr + 1;
        spieler= spieler * -1; /* change player */
        wzahl= ceil( rand('uniform')*6 ); /* cube number */
        feld= feld + wzahl * spieler; /* new field number */
        OUTPUT;
    END;
RUN;
```

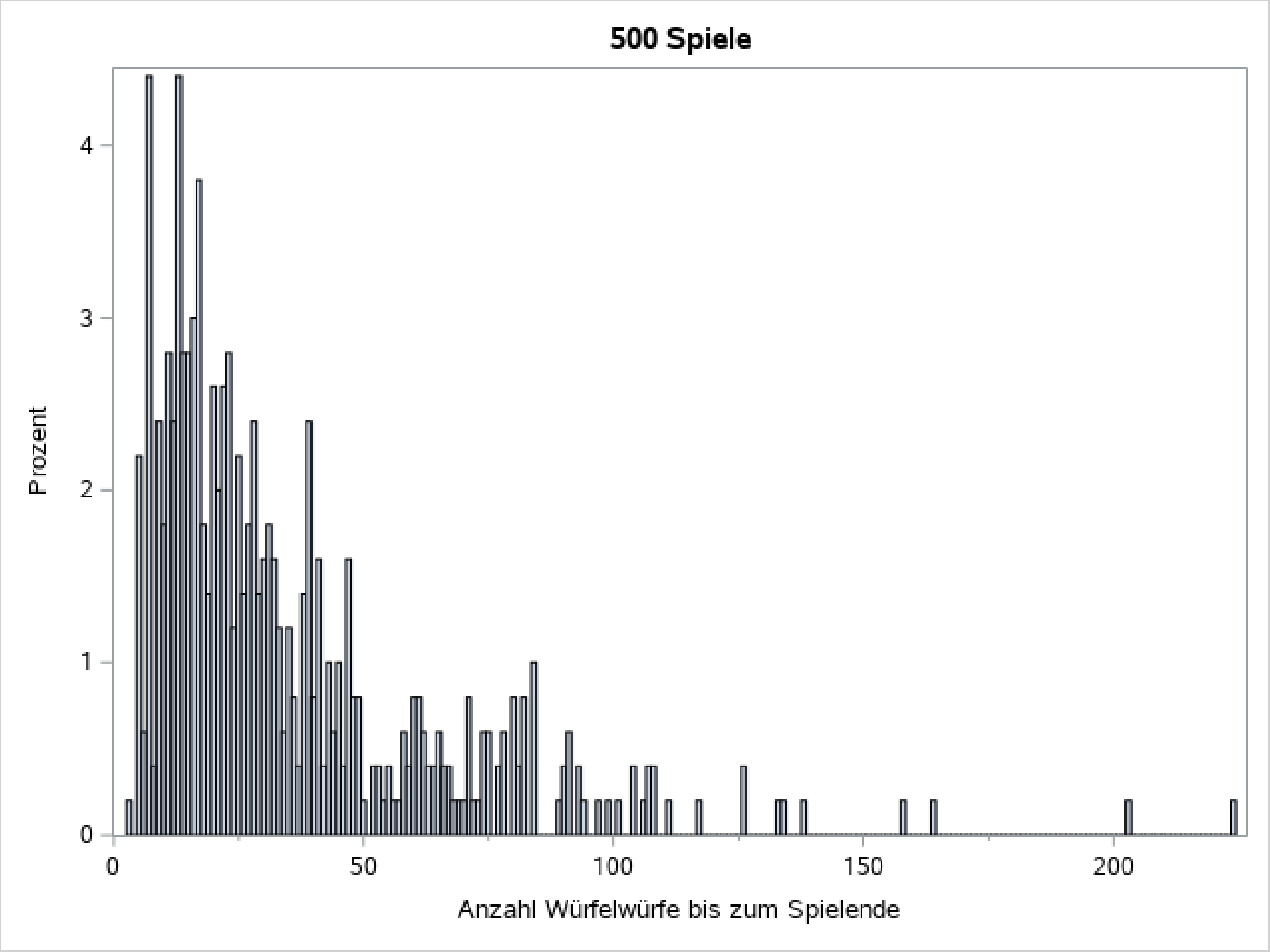
wurfnr	spieler	feld	wzahl
1	-1	-5	5
2	1	-1	4
3	-1	-3	2
4	1	-2	1
5	-1	-7	5

Simulation mehrerer Spiele

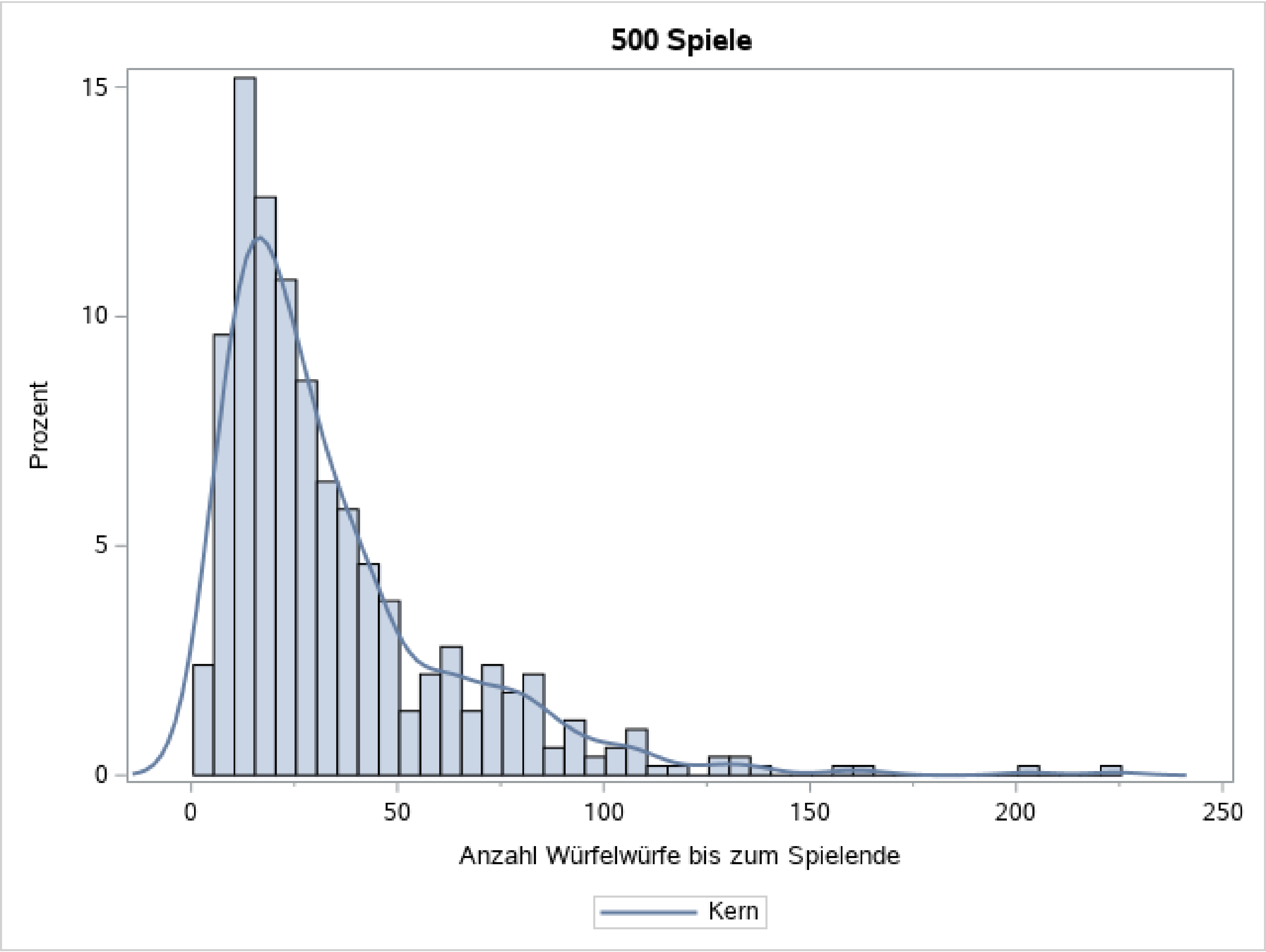
```
/* Simulation of one game */
%LET spielanz= 500;
DATA wspiel;
    CALL streaminit(20220915); /* Seed for random numbers */
    DO spiel=1 TO &spielanz;
        wurfnr= 0; /* Counting the number of dice rolls */
        IF spiel=1 THEN spieler= 1; /* -1=left, 1=right player */
        feld= 0; /* Field number */
        DO WHILE ( abs(feld)<=10 );
            wurfnr= wurfnr + 1;
            spieler= spieler * -1; /* change player */
            wzahl= ceil( rand('uniform')*6 ); /* cube number */
            feld= feld + wzahl * spieler; /* new field number */
        END;
        OUTPUT;
    END;
RUN;
```

spiel	wurfnr	spieler	feld	wzahl
1	75	-1	-12	6
2	53	1	11	3
3	12	1	12	6
4	16	1	13	6
5	11	-1	-11	2

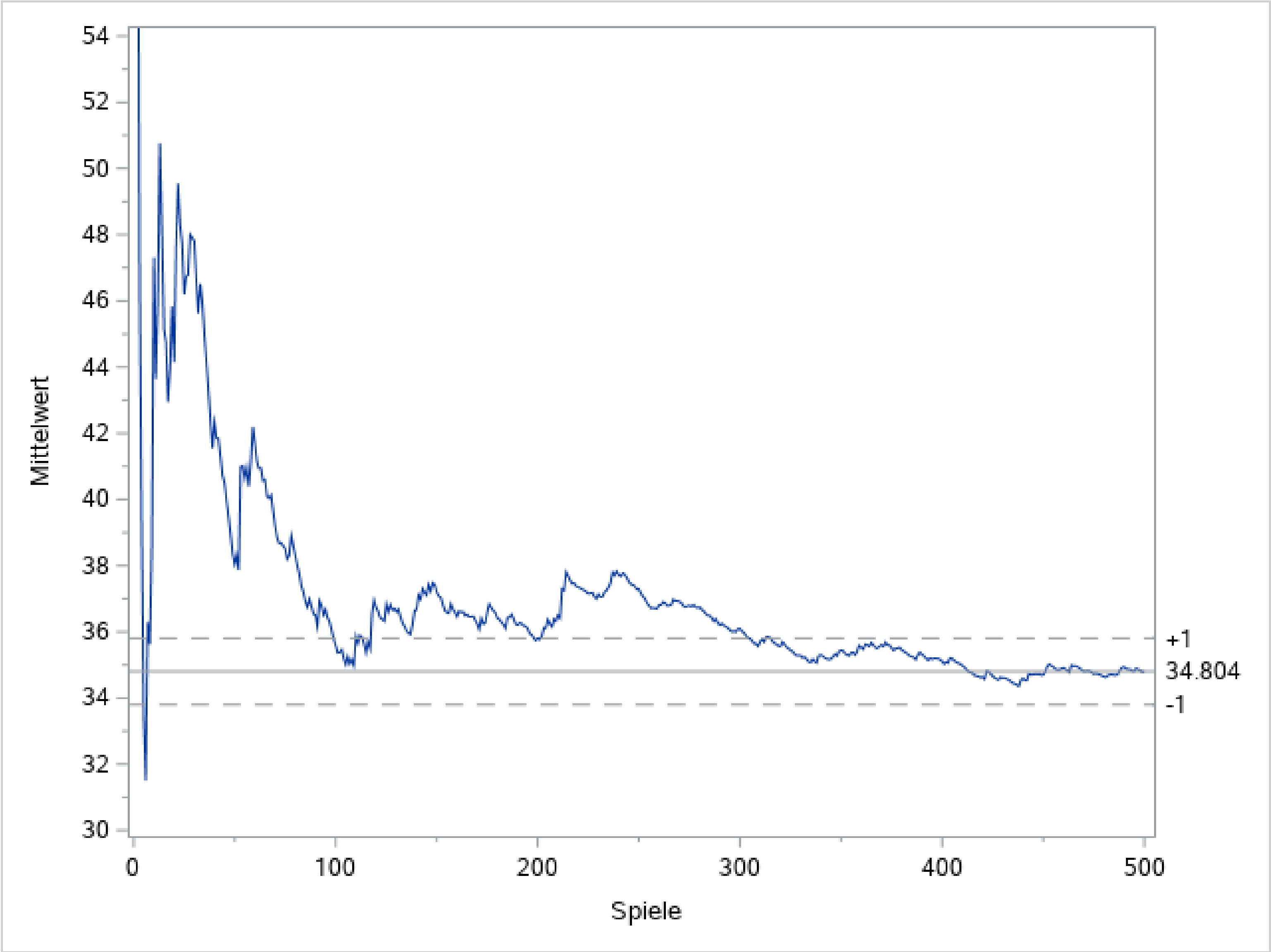
Histogramm über die Würfe bis zum Spielende



Histogramm über die Würfe bis zum Spielende



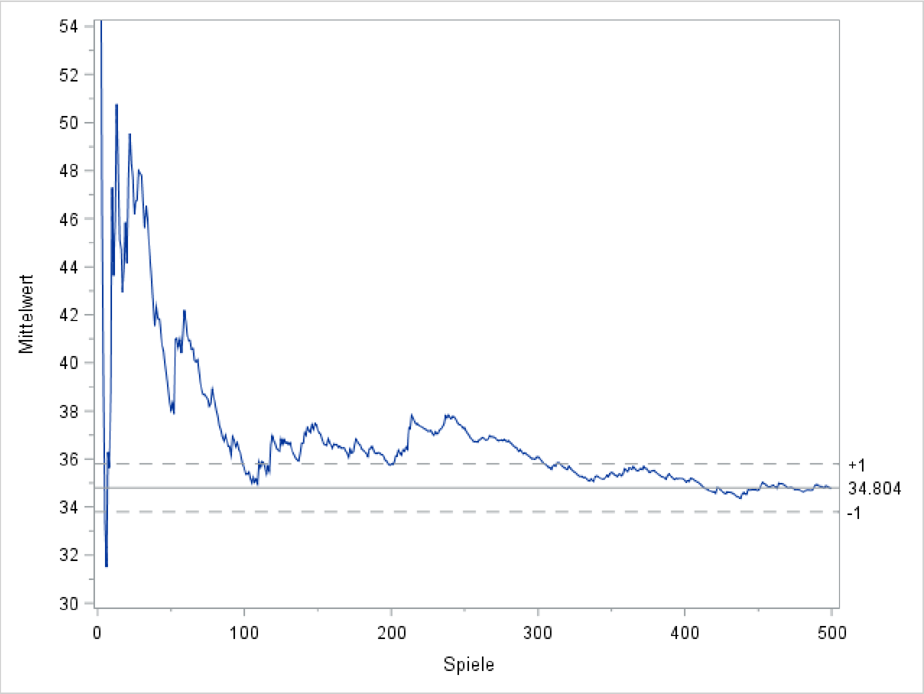
Durchschnittswerte der Monte-Carlo Simulation



Zusammen-
fassung

21 Felder

- Ermittlung des Erwartungswerts über die MC-Simulation
- Durchschnittlich werden etwa 35 Würfelwürfe bis zum Ende eines Spiels benötigt
- Wert konvergiert recht schnell
- Simulation meist schnell und unkompliziert möglich



21 Felder

- Ermittlung des Erwartungswerts über die MC-Simulation
- Durchschnittlich werden etwa 35 Würfelwürfe bis zum Ende eines Spiels benötigt
- Wert konvergiert recht schnell
- Simulation meist schnell und unkompliziert möglich
- Problem wäre ein unendliches Spiel
  →bei 1Mio simulierten Spielen lag das Maximum bei 470 Würfelwürfen
- Sind die Versuche unabhängig?
  - Beginner ist der Verlierer des letzten Spiels

Vielen Dank

matthias.lehrkamp@bayer.com