KSFE
KONFERENZ DER SAS®-ANWENDER IN FORSCHUNG UND ENTWICKLUNG

7. Konferenz für SAS-Anwender in Forschung und Entwicklung
20. - 21. Februar 2003, Universität Potsdam

Bootstrap mit SAS

P. E. Rudolph*, A. Tuchscherer*, B. Jäger, M.Tuchscherer***

* Forschungsinstitut für die Biologie landwirtschaftlicher Nutztiere Dummerstorf

** Institut für Biometrie und Medizinische Informatik
Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald

Gliederung:

1 Einleitung

2

3

4

Einleitung

1

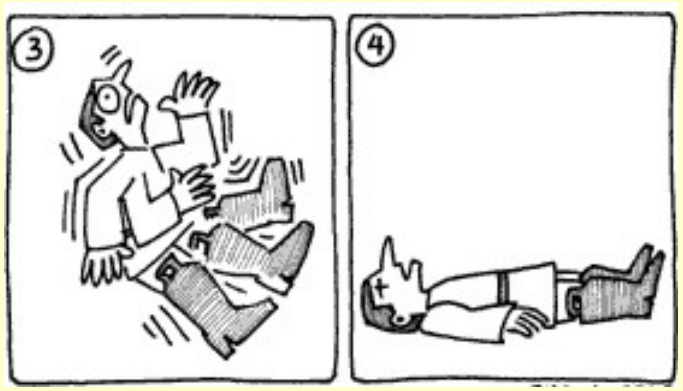
2

3

4

Gottfried August Bürger (1786): Wunderbare Reisen zu Wasser und zu Lande, Feldzüge und lustige Abenteuer des Freiherrn von Münchhausen

Rudolf Erich Raspe (London 1785): The Surprising Adventures of Baron Munchhausen



Einleitung

Bootstrap in der Statistik:

Efron, B. (1979). Bootstrap Methods: Another Look at the Jackknife. Ann. Statist. **7**, 1-26.

1

Rechenintensive Methoden mittels Resimulation bzw. Resampling z. B. zur

2

- Bestimmung des Standardfehlers einer Statistik (eines Schätzers)

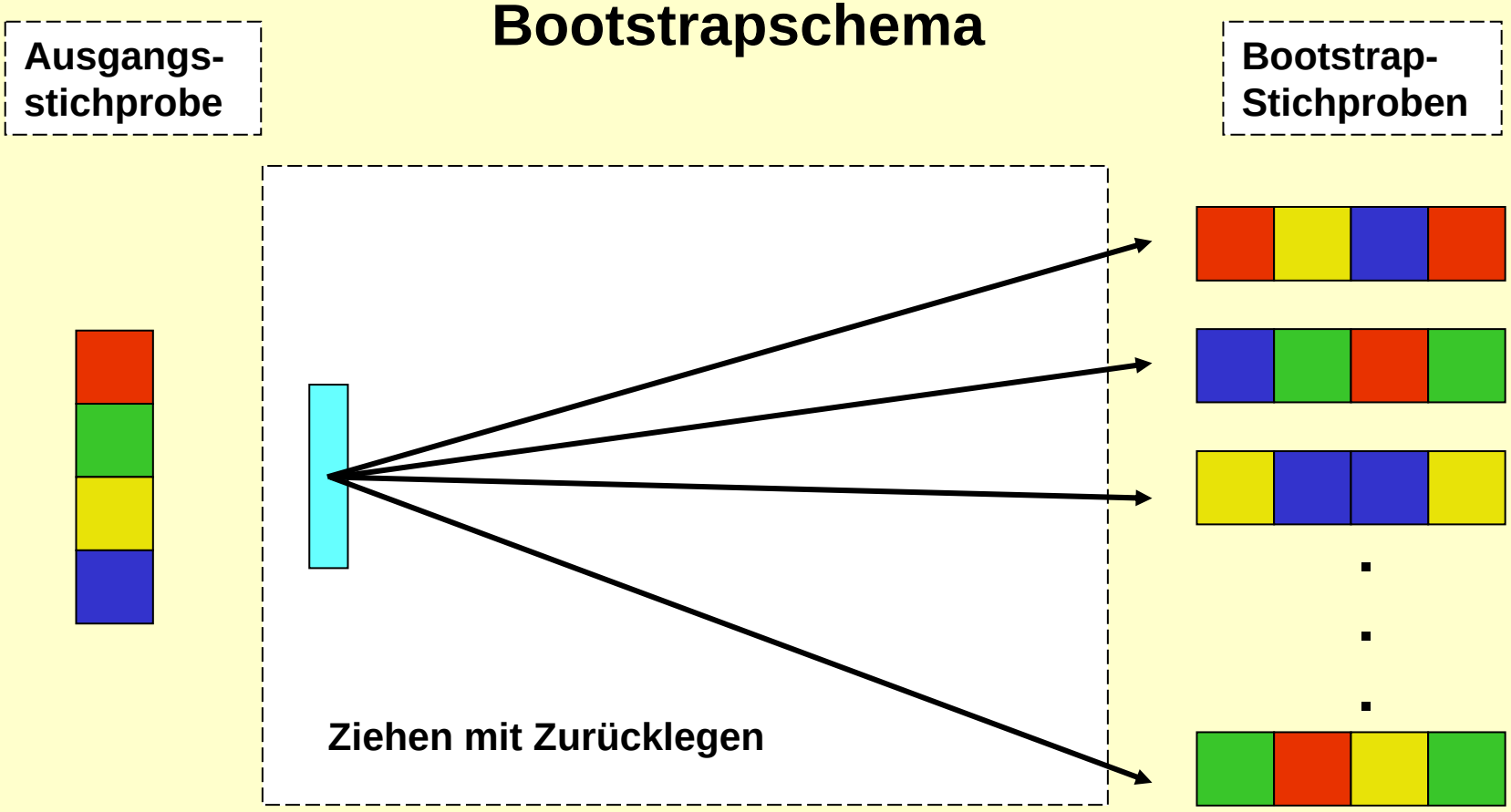
3

- Prüfung einer Statistik auf Abweichung von der Erwartung unter einer gewissen Hypothese

4

Einleitung

Bootstrapschema



1

2

3

4

Die Verteilung einer Statistik kann durch die aus den Bootstrap-Stichproben ermittelte empirische Verteilung dieser Statistik approximiert werden.

Einleitung

1 $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ Stichprobe nach einer Zufallsgröße mit der Verteilung F

1 $s(\mathbf{x})$ Stichprobenfunktion (Statistik)

2 $\hat{\vartheta} = s(\mathbf{x})$ Schätzer für einen unbekannten Parameter der Verteilung F

3 Die Bootstrap-Methode z. B. zur numerischen Bestimmung des Standardfehlers für den Schätzer $\hat{\vartheta} = s(\mathbf{x})$ lässt sich in die folgenden Schritte untergliedern:

4

Einleitung

1. Aus der Ausgangsstichprobe

$$\mathbf{x} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$$

werden unabhängig voneinander m Bootstrap-Stichproben

$$\mathbf{x}_j^* = \{x_{j1}^*, x_{j2}^*, ..., x_{jn}^*\} \quad , \quad j = 1, ..., m$$

gezogen, wobei die Elemente der Bootstrap-Stichproben durch zufällige Auswahl von Elementen der Ausgangsstichprobe mit der Wahrscheinlichkeit 1/n mit Zurücklegen gebildet werden.

Einleitung

1

2. Für die m Bootstrap-Stichproben werden die Stichprobenfunktionen

2

$$\hat{\vartheta}_j^* = s(\mathbf{x}_j^*) \quad , \quad j = 1,\ldots,m$$

3

und damit eine empirische Verteilung der Stichprobenfunktion s berechnet.

4

Einleitung

3. Eine Bootstrap-Schätzung für den Standardfehler $se_F(\hat{\vartheta})$ des Schätzers $\hat{\vartheta} = s(\mathbf{x})$ ergibt sich damit aus der Standardabweichung von

1

$$\hat{\vartheta}^* = \left\{ \hat{\vartheta}_1^* = s(\mathbf{x}_1^*), \hat{\vartheta}_2^* = s(\mathbf{x}_2^*), ..., \hat{\vartheta}_m^* = s(\mathbf{x}_m^*) \right\}$$

2 als

3

$$se_{boot} = \left[\frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^{m} (\hat{\vartheta}_j^* - \bar{\hat{\vartheta}}^*)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

mit

4

$$\bar{\hat{\vartheta}}^* = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \hat{\vartheta}_j^*$$

1

2

Bootstrap-Macros im SAS-Programm JACKBOOT.SAS

3

4

Bootstrap-Macros im SAS-Programm JACKBOOT.SAS

http://ftp.sas.com/techsup/download/stat/jackboot.sas

1

Zur Durchführung von Bootstrap-Analysen sind im SAS-Programm `jackboot.sas` die beiden Macros `%BOOT` und `%BOOTCI` verfügbar.

2

Zunächst ist allerdings ein Macro `%ANALYZE` zu schreiben, das die gewünschten Statistiken berechnet.

3

Dies geschieht in der Regel unter Verwendung geeigneter SAS-Prozeduren.

4

Bootstrap-Macros im SAS-Programm JACKBOOT.SAS

1

```
%macro analyze(data=,out=);
      SAS-Prozedur zur Berechnung der Stichprobenfunktion
      %if &syserr=0 %then %do;
         data step(s)
      %end;
%mend;
```

2

```
%macro boot(  data=,
              samples=200,
              residual=, equation=,
              size=,
              balanced=,
              random=0,
              stat=_numeric_,
              id=,
              biascorr=1,
              alpha=.05,
              print=1,
              chart=1 );
```

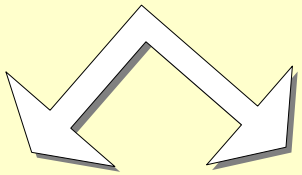
3

4

Ein Bootstrap-Macro mit SAS-IML

1

Ausgangs-stichprobe



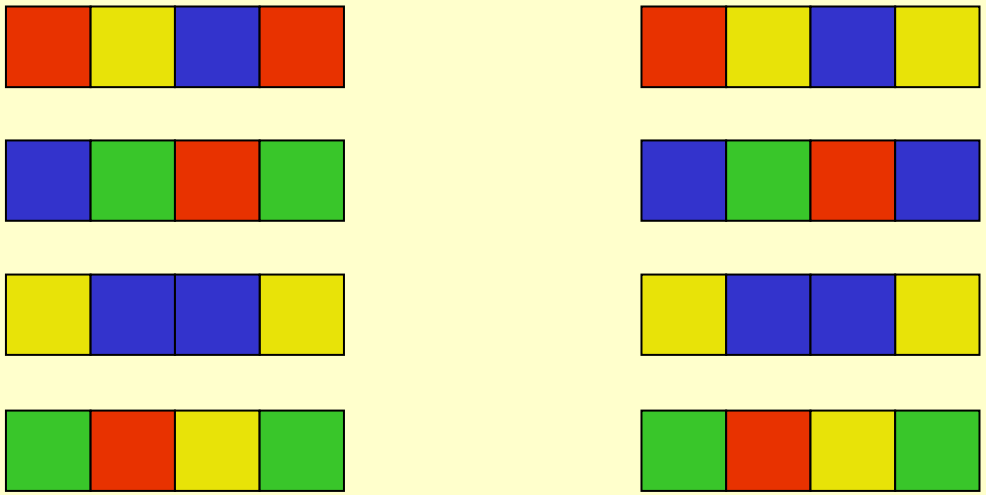
2

Balanced resampling

Uniform resampling

3

Bootstrap-Stichproben



4

Bootstrap-Macros im SAS-Programm JACKBOOT.SAS

werden in %BOOT aufgerufen:

```
%macro bootby /* Uniform bootstrap resampling */
```

oder:

1

```
%macro bootbal /* Balanced bootstrap resampling */

* Gleason, J.R. (1988) "Algorithms for balanced bootstrap
     simulations," American Statistician, 42, 263-266;
```

2

3

```
%macro bootse /* Bootstrap estimates of
                 standard error,
                 bias, and
                 normal confidence intervals */
```

wird nach %BOOT aufgerufen (Nichtnormalität):

4

```
%macro bootci /* Bootstrap percentile-based confidence
                            intervals.*/
```

Bootstrap-Macros im SAS-Programm JACKBOOT.SAS

2.1 Bootstrap-Schätzung für den Standardfehler des Mittelwertes

1. Aus einer vorliegenden konkreten Stichprobe

1

$$\mathbf{x} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$$

werden zunächst m Bootstrap-Stichproben

2

$$\mathbf{x}_j^* = \{x_{j1}^*, x_{j2}^*, ..., x_{jn}^*\} \qquad j = 1, ..., m$$

gezogen.

3

2. Berechnung der Mittelwerte aus den Bootstrap-Stichproben

4

$$\bar{\mathbf{x}}_j^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ji}^* \qquad j = 1, ..., m \qquad \longrightarrow \qquad \bar{\mathbf{x}}^* = \{\bar{\mathbf{x}}_1^*, \bar{\mathbf{x}}_2^*, ..., \bar{\mathbf{x}}_m^*\}$$

Bootstrap-Macros im SAS-Programm JACKBOOT.SAS

3. Eine Bootstrap-Schätzung $\widehat{se}_{boot}(\bar{x})$ für den Standardfehler $se_F(\bar{x})$ des Schätzers $\bar{x}$ ergibt sich damit aus der Standardabweichung von $\bar{x}^* = \{\bar{x}_1^*, \bar{x}_2^*, ..., \bar{x}_m^*\}$:

$$\widehat{se}_{boot}(\bar{x}) = \left[\frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m}(\bar{x}_j^* - \bar{\bar{x}}^*)^2\right]^{\frac{1}{2}} \quad , \quad \text{mit} \quad \bar{\bar{x}}^* = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\bar{x}_j^*$$

Bootstrap-Macros im SAS-Programm JACKBOOT.SAS

2.2 Beispiel

1

Stichprobe

2

$$\mathbf{x} = \{x_1, x_2, ..., x_{10}\}$$

3

aus einer Normalverteilung mit
Erwartungswert 0
und Varianz 1
in der temporären SAS-Datei:

4

STICH1

Tabelle 1: Stichprobenelemente

X	
-0.32659	X_1
1.54244	X_2
0.25903	X_3
-0.55583	X_4
0.77872	X_5
-0.65520	X_6
-0.02210	X_7
-0.77265	X_8
0.72423	X_9
1.26331	X_{10}

Bootstrap-Macros im SAS-Programm JACKBOOT.SAS

Macro %ANALYZE für die Statistik 'MEAN'

1

```
%macro analyze(data=,out=);
```

%VARDEF

2

```
  proc means noprint data=&data  vardef=DF ;
    output out=&out (drop=_type_ _freq_
                     rename=(_STAT_=STAT));
    var X ;
    %bystmt;
  run;
```

ID = STAT in %BOOT

3

```
  %if &syserr=0 %then %do;
     data &out;
        set &out;
        where STAT='MEAN' ;
     run;
```

4

```
  %end;

%mend;
```

Bootstrap-Macros im SAS-Programm JACKBOOT.SAS

Aufruf des Macros %BOOT :

```
1  title1 'Beispiel mit JACKBOOT';
2  title2 'Bootstrap Analysis uniform resampling';
3  %boot(data= STICH1,
4        samples=200,
         balanced=0,
         id=stat,
         random=123);
```

Bootstrap-Macros im SAS-Programm JACKBOOT.SAS

1

2

3

4

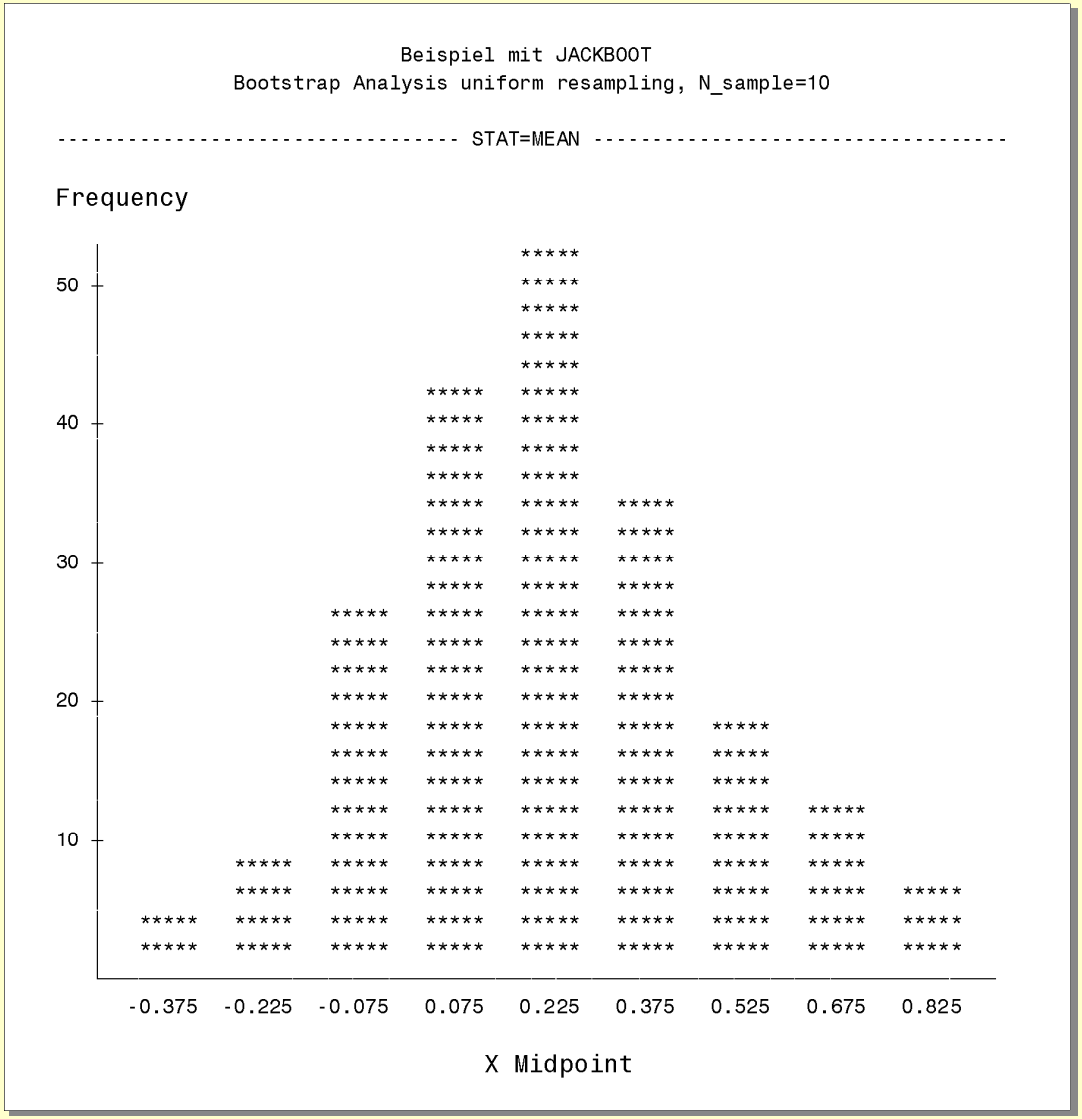


Abbildung 1:

Histogramm für das arithmetische Mittel

Bootstrap-Macros im SAS-Programm JACKBOOT.SAS

Beispiel mit JACKBOOT
Bootstrap Analysis uniform resampling, N_sample=10

stat	Name	Observed Statistic	Bootstrap Mean	Approximate Bias	Approximate Standard Error	Approximate Lower Confidence Limit	Bias-Corrected Statistic
MEAN	X	0.22354	0.22722	.003688310	0.25813	-0.28608	0.21985

stat	Name	Approximate Upper Confidence Limit	Confidence Level (%)	Method for Confidence Interval	Minimum Resampled Estimate	Maximum Resampled Estimate	Number of Resamples
MEAN	X	0.72578	95	Bootstrap Normal	-0.42527	0.88835	200

1 2 3 4

Abbildung 2: Statistische Maßzahlen

Bootstrap-Macros im SAS-Programm JACKBOOT.SAS

Tabelle 2: Bootstrap-Analysen mit N=10, 50, 100
(Uniform Resampling)

N	N_BOOT	MEAN	STDERR	BOOT_MEAN
10	100	0.21666	0.22982	0.26610
10	200	0.21666	0.23864	0.23350
10	500	0.21666	0.24380	0.20419
10	1000	0.21666	0.24838	0.21787
50	100	0.05463	0.15435	0.04996
50	200	0.05463	0.13692	0.03975
50	500	0.05463	0.13467	0.05147
50	1000	0.05463	0.14116	0.04939
100	100	0.05109	0.10179	0.04106
100	200	0.05109	0.10705	0.04319
100	500	0.05109	0.10274	0.05340
100	1000	0.05109	0.10446	0.05115

Bootstrap-Macros im SAS-Programm JACKBOOT.SAS

Tabelle 3: Bootstrap-Analysen mit N=10, 50, 100
(Balanced Resampling)

N	N_BOOT	MEAN	STDERR	BOOT_MEAN
10	100	0.21666	0.25810	0.21666
10	200	0.21666	0.23276	0.21666
10	500	0.21666	0.24302	0.21666
10	1000	0.21666	0.25305	0.21666
50	100	0.05463	0.14696	0.05463
50	200	0.05463	0.14069	0.05463
50	500	0.05463	0.14488	0.05463
50	1000	0.05463	0.13730	0.05463
100	100	0.05109	0.10475	0.05109
100	200	0.05109	0.09226	0.05109
100	500	0.05109	0.10048	0.05109
100	1000	0.05109	0.09937	0.05109

Bootstrap-Macros im SAS-Programm JACKBOOT.SAS

Tabelle 4: Mittelwerte von 1000 Wiederholungen der Bootstrap-Analysen von Tabelle 2

N	N_BOOT	MEAN	STDERR	BOOT_MEAN
10	100	-.001141790	0.28899	0.000727154
10	200	-.001141790	0.29101	-.002384338
10	500	-.001141790	0.29034	-.001536216
10	1000	-.001141790	0.29043	-.001186102
50	100	0.001287094	0.13930	0.001021826
50	200	0.001287094	0.13929	0.000942768
50	500	0.001287094	0.13919	0.001626480
50	1000	0.001287094	0.13922	0.001094297
100	100	0.002188066	0.09874	0.002086736
100	200	0.002188066	0.09940	0.002257538
100	500	0.002188066	0.09946	0.002399593
100	1000	0.002188066	0.09922	0.002128158

1

2

3

Ein Bootstrap-Macro mit SAS-IML

4

Ein Bootstrap-Macro mit SAS-IML

Vorgehensweise zur Realisierung von Bootstrap-Analysen:

1. Erzeugung einer vorgegebenen Anzahl von Bootstrap-Stichproben aus der Ausgangsstichprobe mit dem Macro Bootstrap
2. Berechnung der interessierenden Statistik für die Ausgangsstichprobe und alle Bootstrap-Stichproben unter Verwendung einer geeigneten SAS-Prozedur
3. Beschreibung der Verteilung der verwendeten Statistik in der Regel mit den SAS-Prozeduren MEANS bzw. UNIVARIATE und gegebenenfalls ergänzenden data steps

3.1 Das SAS-Macro %BOOTSTRAP

1

Vorausetzung für die Anwendung des Macros ist das Vorliegen der SAS-Datei SAMPLE, die die Ausgangsstichprobe enthält.

2

Die Anwendung dieses Macros erfordert keine Kenntnisse der Macro-Programmierung. Man muß nur die Parameter beim Aufruf des Macros setzen.

3

4

Ein Bootstrap-Macro mit SAS-IML

```
%macro Bootstrap(M, N_RESAMPLE, SAMPLE, START,
                 BALANCE, BOOT, NAMES)
```

M	Anzahl der Bootstrap-Stichproben
N_RESAMPLE	Umfang der Bootstrap-Stichproben Kann nur bei BALANCE=0 verschieden vom Umfang der Ausgangsstichprobe sein!
START	Startwert für den Zufallszahlengenerator bei der Resampling-Prozedur: START=0: zufälliger Startwert durch Systemzeit START=G: fester Startwert mit der positiven ganzen Zahl G
SAMPLE	temporäre SAS-Datei der Ausgangsstichprobe mit der/den Variablen der Ausgangsstichprobe (z.B.: X, Y)

1 2 3 4

Ein Bootstrap-Macro mit SAS-IML

```
%macro Bootstrap(M, N_RESAMPLE, SAMPLE, START,
                 BALANCE, BOOT, NAMES)
```

BALANCE Parameter zum Einstellen der Resampling-Prozedur:

1

BALANCE=1: balanciertes Resampling
BALANCE=0: gleichverteiltes Resampling

BOOT temporäre SAS-Datei der M Bootstrap-Stichproben vom Umfang N_RESAMPLE:

2

erste Spalte:	Nummer der Bootstrap-Stichprobe (N_BOOT)
zweite Spalte:	Nummer des Stichprobenelements der Ausgangstichprobe SAMPLE (NR_Obs)
restliche Spalten:	Variable/n der Ausgangsstichprobe (z.B.: X, Y)

3

4

NAMES Variablenbezeichnung in BOOT

z.B.: {'N_BOOT' 'NR_Obs' 'X' 'Y'}

Ein Bootstrap-Macro mit SAS-IML

Aufruf des Macros z. B.:

1

```
%Bootstrap( 200,
            10,
            123,
            STICHPROBE,
            0,
            BOOTSTICH,
            {'N_BOOT' 'NR_Obs' 'X'});
```

```
M
N_RESAMPLE
START
SAMPLE
BALANCE
BOOT
NAMES
```

2 Uniform resampling

3

```
%Bootstrap( 200,
            10,
            123,
            STICHPROBE,
            1,
            BOOTSTICH,
            {'N_BOOT' 'NR_Obs' 'X'});
```

```
M
N_RESAMPLE
START
SAMPLE
BALANCE
BOOT
NAMES
```

4 Balanced resampling

3.2 Beispiel

Erzeugen der 200 Bootstrap-Stichpro

1

2

```
title1 'Beispiel mit %BOOTSTRAP';
title2 'Bootstrap Analysis unifor

%Bootstrap(200,10,123,STICH1,0,BO
          {'N_BOOT' 'NR_Obs' 'X'
```

3

4

WORK.BOOTSTICH

2000	N_BOOT	NR_Obs	X
1	1	8	-0.7726
2	1	4	-0.5558
3	1	2	1.5424
4	1	10	1.2633
5	1	4	-0.5558
6	1	3	0.2590
7	1	8	-0.7726
8	1	4	-0.5558
9	1	2	1.5424
10	1	2	1.5424
11	2	8	-0.7726
12	2	5	0.7787
13	2	10	1.2633
14	2	3	0.2590
15	2	8	-0.7726
16	2	6	-0.6552
17	2	6	-0.6552
18	2	9	0.7242
19	2	2	1.5424
20	2	9	0.7242
21	3	7	-0.0221
22	3	8	-0.7726
23	3	8	-0.7726
24	3	4	-0.5558
25	3	6	-0.6552
26	3	10	1.2633
27	3	1	-0.3266
28	3	7	-0.0221
29	3	7	-0.0221
30	3	4	-0.5558

Abbildung 3:

Erzeugte Bootstrap-Stichproben

Ein Bootstrap-Macro mit SAS-IML

Berechnung des Mittelwerts der Ausgangsstichprobe

```
proc means noprint data=STICH1  vardef=DF ;
   output out=OUTSTICH1 (drop=_type_ _freq_
                         rename=(_STAT_=STAT));
   var X ;
run;
data OUTSTICH1;
   set OUTSTICH1;
   where STAT='MEAN' ;
run;
```

1 2 3 4

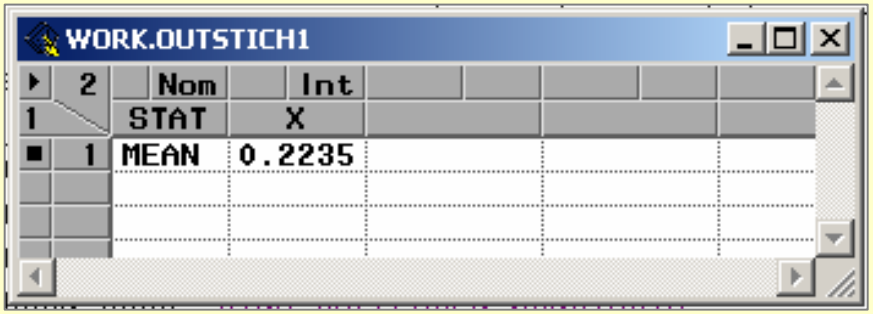


Abbildung 4:

Mittelwert der Ausgangsstichprobe

Ein Bootstrap-Macro mit SAS-IML

Berechnung der 200 Mittelwerte der Bootstrap-Stichproben

```
1  proc means noprint data=BOOTSTICH
       output out=OUTBOOT1 (drop=_type
                            rename=(_S
       var X ;
2      by N_BOOT;
   run;
   data OUTBOOT1;
       set OUTBOOT1;
3      where STAT='MEAN' ;
   run;
4
```

WORK.OUTBOOT1

200	N_BOOT	STAT	X
1	1	MEAN	0.2937
2	2	MEAN	0.2436
3	3	MEAN	-0.2442
4	4	MEAN	-0.2379
5	5	MEAN	0.3937
6	6	MEAN	-0.4253
7	7	MEAN	0.0035
8	8	MEAN	0.1409
9	9	MEAN	0.2956
10	10	MEAN	0.1840
11	11	MEAN	0.3793
12	12	MEAN	0.0081
13	13	MEAN	0.2980
14	14	MEAN	0.4146
15	15	MEAN	-0.3460
16	16	MEAN	0.0588
17	17	MEAN	0.8585
18	18	MEAN	0.2394
19	19	MEAN	0.2921
20	20	MEAN	-0.3594
21	21	MEAN	0.2297
22	22	MEAN	0.4437

Abbildung 5:

Mittelwerte der Bootstrap-Stichproben

Ein Bootstrap-Macro mit SAS-IML

Statistische Maßzahlen der Verteilung des Mittelwertschätzers

1
2
3
4

```
proc sort data=OUTBOOT1; by STAT; run;
proc means data=WORK.OUTBOOT1  noprint   vardef=DF ;
   var X ;
   id STAT ;
   output out=WORK.STATBOOTMEAN (drop=_type_ _freq_);
   by STAT ;
run;
```

WORK.STATBOOTMEAN

	STAT	_STAT_	X
1	MEAN	N	200.0000
2	MEAN	MIN	-0.4253
3	MEAN	MAX	0.8883
4	MEAN	MEAN	0.2272
5	MEAN	STD	0.2581

Abbildung 6:

Statistische Maßzahlen der Mittelwerte der Bootstrap-Stichproben

Ein Bootstrap-Macro mit SAS-IML

Data steps . . .

1
2
3
4

```
proc transpose data=STATBOOTMEAN out=STATBOOTMEANT
prefix=BOOT_;
   id _STAT_;
   by STAT;
run;

proc sort data=OUTSTICH1; by STAT ; run;
proc transpose data=OUTSTICH1 out=OUTSTICH1T prefix=WERT_;
   by STAT ;
run;
```

Ein Bootstrap-Macro mit SAS-IML

```
Data BOOTMASSZAHL (rename=(_name_=NAME WERT_1=WERT));
  merge OUTSTICH1T STATBOOTMEANT;
  by STAT;
  BIAS=BOOT_MEAN-WERT_1;
  MEAN_CORR=WERT_1-BIAS;
  ALPHA=0.05;
  APP_NORMAL_CI_LOW=MEAN_CORR-probit(1-ALPHA/2)*BOOT_STD;
  APP_NORMAL_CI_UPP=MEAN_CORR+probit(1-ALPHA/2)*BOOT_STD;
  label STAT = 'Statistic'
        _NAME_  ='Name Variable'
        WERT_1 ='Observed Statistic'
        BOOT_MEAN='Bootstrap Mean'
        BIAS  ='Approximate Bias'
        MEAN_CORR='Bias-Corrected Statistic'
        BOOT_STD='Approximate Standard Error'
        APP_NORMAL_CI_LOW  ='Approximate Lower Confidence Limit'
        APP_NORMAL_CI_UPP  ='Approximate Upper Confidence Limit'
        ALPHA='ALPHA'
        BOOT_MIN ='Minimum Resampled Estimate'
        BOOT_MAX ='Maximum Resampled Estimate'
        BOOT_N ='Number of Resamples';
run;
```

1

2

3

4

Ein Bootstrap-Macro mit SAS-IML

```
proc print data=BOOTMASSZAHL noobs label;
id STAT NAME;
run;
```

1

2

3

4

Beispiel mit %BOOTSTRAP
Bootstrap Analysis uniform resampling, N_sample=10

Statistic	Name Variable	Observed Statistic	Number of Resamples	Minimum Resampled Estimate	Maximum Resampled Estimate	Bootstrap Mean	Approximate Standard Error
MEAN	X	0.22354	200	-0.42527	0.88835	0.22722	0.25813

Statistic	Name Variable	Approximate Bias	Bias-Corrected Statistic	ALPHA	Approximate Lower Confidence Limit	Approximate Upper Confidence Limit
MEAN	X	.003688310	0.21985	0.05	-0.28608	0.72578

Abbildung 7: Ergebnisausdruck der Bootstrap-Analyse

Ein Bootstrap-Macro mit SAS-IML

. . . und Grafik mit PROC UNIVARIATE

1
2
3
4

```
PROC UNIVARIATE Data=WORK.OUTBOOT1
                ALL
               VARDEF=df;

  HISTOGRAM X  / normal (noprint color=black )
                 cbarline=black  cfill=LIGR ;

  OUTPUT OUT=OUTUNIVAR N=BOOT_N
                       MIN=BOOT_MIN
                       MAX=BOOT_MAX
                       MEAN=BOOT_MEAN ;
  VAR X ;
  by STAT;
Run;
```

Ein Bootstrap-Macro mit SAS-IML

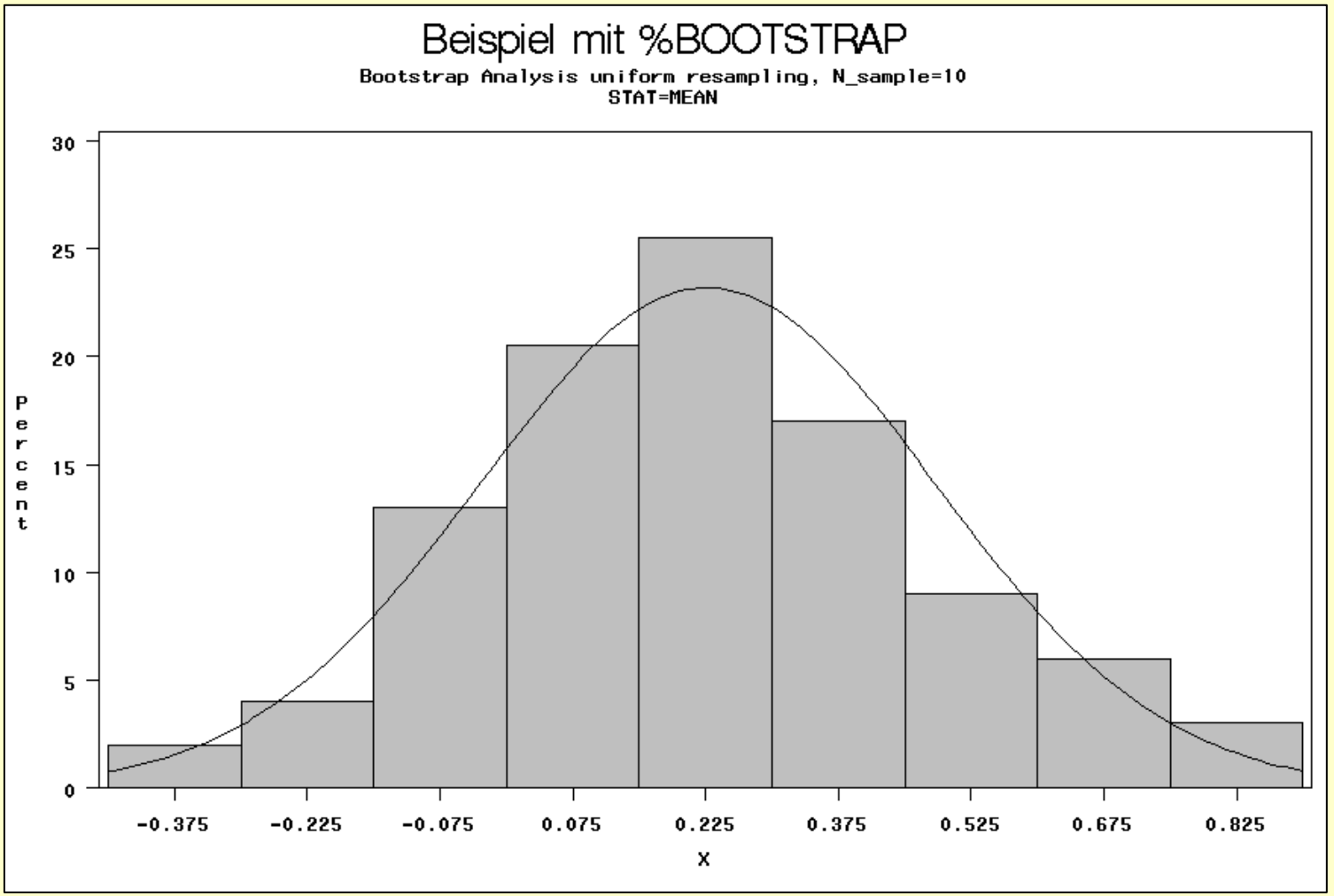


Abbildung 8: Histogramm für das arithmetische Mittel

1

2

3

4

1

2

3

4

Literatur

Literatur

- Efron, B. (1979). Bootstrap Methods: Another Look at the Jackknife. Ann. Statist. **7**, 1-26.
- Efron, B. & Tibshirani, R. J. (1993). An Introduction to the Bootstrap. Monographs on Statistics and Applied Probability. New York: Chapman & Hall.
- Gleason, J. R. (1988). Algorithms for Balanced Bootstrap Simulations. American Statistician, 42, 263-266.
- Johnson, N. L.; Kotz, S. (1972). Distributions in Statistics: Continuous Multivariate Distributions. J. Wiley, New York.
- Rey, W. J. J. (1983). Introduction to Robust and Quasi-Robust Statistical Methods. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo.
- SAS Institute Inc. (1999). SAS Macro Language: Reference, Version 8, Cary, NC: SAS Institute Inc.
- SAS Institute Inc. (1999). SAS/IML User's Guide, Version 8, Cary, NC: SAS Institute Inc.
- SAS Institute Inc. (1999). SAS/STAT® User's Guide, Version 8, Cary, NC: SAS Institute Inc.
- Tuchscherer, A.; Rudolph, P. E.; Jäger, B.; Tuchscherer, M. (1999). Ein SAS-Makro zur Erzeugung multivariat normalverteilter Zufallsgrößen. In: Proceedings der 3. Konferenz der SAS-Anwender in Forschung und Entwicklung, Ed. Ortseifen, C., Heidelberg, 293-306.
- Tuchscherer, A.; Rudolph, P. E.; Jäger, B.; Tuchscherer, M. (2000). Erzeugung nichtnormaler multivariater Zufallsgrößen mit SAS. In: Proceedings der 4. Konferenz der SAS-Anwender in Forschung und Entwicklung, Eds. Bödecker, R.-H.; Hollenhorst, M. S., Gießen, 235-265.

1 2 3 4